Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za prvi razred, šk. 2005/06.

UVOD U KONGRUENCIJE I DELJIVOST

Definicija. Za dva cela broja a i b kažemo da su kongruentna po modulu n ukoliko $n \mid a-b$ i zapisujemo

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ ili } a \equiv_n b.$$

Teorema. Relacija $\equiv$ ima sledeća svojstva:

- ako je $a \equiv_n b$ i $c \equiv_n d$, tada je $a+c \equiv_n b+d$ i $ac \equiv_n bd$;
- ako je $a \equiv_n b$, tada za svaki prirodan broj m važi $a^m \equiv_n b^m$;
- ako je $ac \equiv bc \pmod{n}$, tada je $a \equiv b \left(\bmod \dfrac{n}{(n,c)}\right)$, i obrnuto.
- $a \equiv_n b$ i $a \equiv_m b$ ako i samo ako je $a \equiv b \pmod{[m,n]}$.

Mala Fermaova teorema. Ukoliko je p prost broj, a a ceo, važi:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

1. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2^{30} sa 13.

2. Odrediti ostatak koji se dobija pri deljenju broja 317^{259} sa 15.

3. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je broj 2^n-1 deljiv sa 7. Dokazati da ne postoji prirodan broj n takav da je 2^n+1 deljiv sa 7.

4. Neka je $A = 3^{105}+4^{105}$. Dokazati da je A dejivo sa 7 i odrediti ostatke broja A pri deljenju sa 11 i 13.

5. Dokazati da je broj $20^n+16^n-3^n-1$ deljiv sa 323 za svaki paran prirodan broj n.

6. Dokazati da je cifra stotina broja $2^{1999}+2^{2000}+2^{2001}$ parna.

7. Dokazati da je broj n^n-n deljiv sa 24 za svaki neparan prirodan broj.

8. Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj $n^{13}-n$ deljiv sa 2730.

9. Dokazati da je broj $2222^{5555}+5555^{2222}$ deljiv sa 7.

10. Naći poslednje dve cifre broja

$$1!+2!+3!+\ldots+2005!.$$

11. Odrediti poslednju cifru broja $7^{7^{7^7}}$.

12. Odrediti poslednje dve cifre broja 9^{9^9}.

13. Odrediti ostatak deljenja broja $6^{83}+8^{83}$ sa 49.

14. (Savezno 1969, 2.raz) Dokazati da je za svaki prirodan broj n bar jedan od brojeva $3^{3n}+2^{3n}$ i $3^{3n}-2^{3n}$ deljiv sa 35.

15. Dokazati da ni za jedan prirodan broj n broj

$$1^{1005}+2^{2005}+\ldots+n^{2005}$$

nije deljiv sa $n+2$.

16. Dokazati da $2^{50}+1$ nije deljivo sa 2^7-1.

17. (IMO 1975, 4.zad) Neka je $A = 4444^{4444}$. Neka je zbir cifara broja A broj B, zbir cifara broja B broj C. Odrediti zbir cifara broja C.

18. Niz brojeva formira se na sledeći način: prvi član niza je broj 3^{1996}; svaki sledeći, počev od drugog, jednak je zbiru cifara prethodnog. Naći broj koji se nalazi na 1996. mestu.

19. (JBMO 1999) Za svaki broj $n = 0,1,2,\ldots,1999$ broj A_n definisan je sa $A_n = 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$. Naći najveći zajednički delilac brojeva $A_0, A_1, \ldots, A_{1999}$.

20. (IMO 1978, 1.zad) Neka su m i n prirodni brojevi, takvi da je $n > m \geq 1$. Poslednje tri cifre broja 1978^m jednake su, redom, poslednjim trima ciframa broja 1978^n. Odrediti m i n tako da $m+n$ ima najmanju moguću vrednost.

21. Neka su m i n prirodni brojevi. Dokazati da se broj $5^m + 5^n$ može prikazati kao zbir dva kvadrata ako i samo ako je broj $n - m$ paran.

22. Neka su dati prosti brojevi $p_1 < p_2 < \cdots < p_{31}$. Dokazati da ako 30 deli sumu njihovih četvrtih stepena, tada među njima postoje tri uzastopna prosta broja.

23. Dokazati da postoji beskonačno mnogo celih brojeva koji se ne mogu predstaviti u obliku zbira kubova tri cela broja.

24. Dokazati da $21 \mid a^2 + b^2$ povlači $441 \mid a^2 + b^2$.

25. Da li jednačina $x^3 + y^3 + z^3 = 2003$ ima rešenja u skupu celih brojeva ?

26. Da li jednačina $x^5 + y^5 + z^5 = 2006$ ima rešenja u skupu celih brojeva ?

27. Naći sve proste brojeve p, q, r koji zadovoljavaju jednačinu $p^q + q^p = r$.

28. Da li se broj $1995^n - 5^m$ može završavati sa tačno 1995 nula ?

29. (BMO 1988) Naći sve parove a_n, a_{n+1} celih brojeva u nizu $\{a_n\}$ definisanom sa $a_n = a^n + 49$, tako da važi

$$a_n = pq,\ a_{n+1} = rs,$$

gde su p, q, r, s prosti brojevi takvi da je $p < q, r < s, q - p = s - r$.

30. Neka su m i n prirodni brojevi za koje važi

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0.$$

Dokazati da je tada

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}.$$

31. Naći sve parove prostih brojeva p i q, takve da je

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

32. Naći najmani prirodan broj $N > 1976$ takav da je broj

$$\frac{n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_N^4}{5},$$

ceo za sve prirodne brojeve $n_1, n_2, \ldots, n_N$, koji nisu deljivi sa 5.

33. (Savezno 1969, 4.raz) Ako je p neparan prost broj i a ceo broj koji nije deljiv sa p, onda je jedan i samo jedan od brojeva

$$A = a^{1+2+\ldots+(p-1)} + 1, \quad B = a^{1+2+\ldots+(p-1)} - 1,$$

deljiv sa p.

34. (Savezno 1972, 4.raz) Za svaki prirodan broj n, broj $n + 3n^3 + 7n^7 + 9n^9$ je deljiv sa 10. Dokazati.

35. (BMO 1991) Neka su m i n pozitivni celi brojevi i

$$A(m,n) = m^{3^{4n}+6} - m^{3^{4n}+4} - m^5 + m^3.$$

Naći sve brojeve n sa svojstvom da je broj $A(m,n)$ deljiv sa 1992 za svako m.

36. (BMO 2004) Rešiti u skupu prostih brojeva jednačinu:

$$x^y - y^x = x \cdot y^2 - 19.$$

© Marko Radovanović
radmarko@yahoo.com
oktobar 2005.

REŠENJA I UPUTSTVA

1. Po maloj Fermaovoj teoremi je $2^{12} \equiv_{13} 1$, pa je $2^{30} \equiv_{13} 2^6 = 64 \equiv_{13} -1$. Znači ostatak broja 2^{30} pri deljenju sa 13 jednak je 12.

2. Po Maloj fermaovoj teoremi imamo da je $317^2 \equiv_3 1$, pa je $317^{259} \equiv_3 317 \equiv_3 2$ i slično $317^4 \equiv_5 1$, pa je $317^{259} \equiv_5 317^3 \equiv_5 2^3 \equiv_5 3$. Sada kako broj 317^{259} daje ostatak 2 po modulu 3 i ostatak 3 po modulu 5, to on daje ostatak 8 pomodulu 15.

3. Primetimo da je $2^1 \equiv_7 2$, $2^2 \equiv_7 4$ i $2^3 \equiv_7 1$, pa je $2^n \equiv_7 1$, ako i samo ako je n deljivo sa 3. Takođe lako se vidi da $2^n \equiv_7 -1$ ne važi ni za jedan prirodan broj n.

4. Kako je $4^{105} \equiv_7 (-3)^{105} = -3^{105}$, to je očigledno $3^{105} + 4^{105}$ deljivo sa 7. Dalje imamo da je po Maloj Fermaovoj teoremi $3^{10} \equiv_{11} 4^{10} \equiv_{11} 1$, pa je $3^{105} + 4^{105} \equiv_{11} 3^5 + 4^5 = 1267 \equiv_{11} 2$. Slično, po Maloj Fermaovoj teoremi imamo da je $3^{12} \equiv_{13} 4^{12} \equiv_{13} 1$, pa je $3^{105} + 4^{105} \equiv_{13} 3^9 + 4^9$.Dalje, kako je $3^3 \equiv_{13} 1$, to je $3^9 \equiv_{13} 1$ i kako je $4^3 \equiv -1$, to je $4^9 \equiv -1$, pa je $3^{105} + 4^{105}$ deljivo sa 13.

5. Kako je $323 = 17 \cdot 19$, dovoljno je dokazati da je dati izraz deljiv sa 17 i sa 19. Kako je n paran imamo da je $n = 2k$, pa je $16^n \equiv_{17} (-1)^{2k} = 1$, pa je $16^n - 1$ deljivo sa 17, a kako je $20 \equiv_{17} 3$, to je i $20^n - 3^n$ deljivo sa 17, pa je i dati izraz deljiv sa 17. Dalje, kako je $20 \equiv_{19} 1$, to je $20^n - 1$ deljivo sa 19, a kako je n paran to je $16^n \equiv_{19} (-3)^n = 3^n$, pa je $16^n - 3^n$ deljivo sa 19, pa je i ceo izraz deljiv sa 19.

6. Kako je $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} = 2^{1999} \cdot 7$, to je dati broj očigledno deljiv sa 8, pa mu je trocifreni završetak deljiv sa 8, a dvocifreni sa 4. Odredimo ostatak datog broja pri deljenju sa 25. Kako je $2^{10} = 1024 \equiv_{25} -1$, to je $2^{20} \equiv_{25} 1$, pa je $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} \equiv_{25} 13 + 1 + 2 = 16$. Sada je jasno da dvocifreni završetak broja mora biti jedan od brojeva $16, 41, 56, 81$, pa kako on mora biti deljiv sa 4, jedine mogućnosti su 16 i 56. Ukoliko je $\overline{abc}$ trocifreni završetak datog broja, on mora biti deljiv sa 8, pa kako je $\overline{abc} = 100a + \overline{bc}$, a $\overline{bc}$ je jedan od brojeva 16 ili 56 koja su oba deljiv sa 8, to mora biti i $100a$ deljivo sa 8. Samim tim je a paran.

7. Kako je $24 = 8 \cdot 3$, dovoljno je dokazati da je $n^n - n$ deljivo sa 3 i sa 8. Primetimo prvo da je $n^n - n = n(n^{n-1} - 1)$. Kako je $n - 1$ paran, a n neparan i kako kvadrat prirodnog broja daje ostatak 1 pri deljenju sa 8, to je $n^{n-1} - 1$ deljivo sa 8. Dalje, ukoliko je n deljivo sa 3 tada je i $n(n^{n-1} - 1)$ očigledno deljivo sa 3. Ukoliko n nije deljiv sa 3 tada kako je $n - 1$ neparan, to n^{n-1} daje ostatak 1 pri deljenju sa 3, pa je $n^{n-1} - 1$ deljiv sa 3.

8. Kako je $2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, dovoljno je dokazati da je $n^{13} - n$ deljivo sa $2, 3, 5, 7$ i 13. Po Maloj Fermaovoj teoremi je očigledno deljiv sa 13. Dalje, kako je $n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$, to se kao i u prethodnom zadatku dokazuje da je dati broj deljiv sa 3. Takođe, lako se dokazuje i da je dati broj uvek paran. I na kraju kako je po Maloj Fermaovoj teoremi $n^4 \equiv_5 1$, ukoliko n nije deljiv sa 5, to je $n^{12} - 1$ deljiv sa 5 ukoliko n nije deljiv sa 5, a ako je deljiv sa 5 onda je očigledno $n^{13} - n$ deljiv sa 5.

9. Kako je $2222 \equiv_7 3$, to je po delu pod (b) teoreme

$$2222^{5555} \equiv_7 3^{5555} = 3^{3 \cdot 1851} \cdot 3^2 \equiv_7 (-1)^{1851} \cdot 2 = -2.$$

Slično je

$$5555^{2222} \equiv_7 4^{2222} = 4^{3 \cdot 740} \cdot 4^2 \equiv_7 2,$$

pa je jasno da je $2222^{5555} + 5555^{2222}$ deljivo sa 7.

10. Primetimo prvo da je $10!$ deljiv sa 100 i da $10! \mid k!$, za svaki prirodan broj k ne manji od 10. Sada su poslednje dve cifre datog broja jednake poslednjim dvema ciframa broja

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9!.$$

Dalje, svaki od brojeva $5!, 6!, 7!, 8!$ i $9!$ su deljivi sa 10, pa je poslednja cifra broja jednaka poslednjoj cifri broja $1!+2!+3!+4! = 33$, tj. poslednja cifra datog broja je 3. Takođe, nije teško zaključiti da je pretposlednja cifra datog broja jendaka poslednjoj cifri broja

$$\frac{5! + 6! + 7! + 8! + 9!}{10} + 3 = 3 \cdot 4 \cdot (1 + 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7 \cdot 8 + 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) + 3 \equiv_{10} 2(1 + 6 + 2 + 6 + 4) + 3 \equiv_{10} 1.$$

Sada je jasno da je dvocifreni završetak ovog broja jednak 13.

11. Primetimo da je $7^2 = 49 \equiv_{10} -1$, pa je $7^4 \equiv_{10} 1$. Dalje kako je $7 \equiv_4 -1$, to kako je broj 7^7 neparan, to je i $7^{7^7} \equiv_4 -1$, pa je $7^{7^7} = 4k + 3$. Sada je $7^{7^{7^7}} \equiv_{10} 7^{4k+3} \equiv_{10} 7^3 \equiv_{10} 3$.

12. Primetimo da je po binomnoj formuli $9^{10} = (10 - 1)^{10} \equiv_{100} 1$. Sada kako je $9^9 \equiv_{10} -1$, to je $9^9 = 10k + 9$, pa je

$$9^{9^9} \equiv_{100} 9^9 \equiv_{100} 89.$$

13. Primenom binomne formule dobijamo

$$6^{83} + 8^{63} = (7-1)^{83} + (7+1)^{83} = 7^{83} - \binom{83}{1} 7^{82} + \ldots + \binom{83}{82} 7 - 1 + 7^{83} + \binom{83}{1} 7^{82} + \ldots + \binom{83}{82} 7 + 1 =$$

$$= 49 \cdot N + 2 \cdot \binom{83}{82} \cdot = 49 \cdot N + 49 \cdot 23 + 35.$$

Sada je jasno da je tražni ostatak jednak 35.

14. Ukoliko je n neparan imamo da je
$$3^{3n} + 2^{3n} = (3^3 + 2^3)M = 35M,$$
pa je prvi od njih deljiv sa 35. Dalje ukoliko je n paran imamo da je $n = 2k$ i
$$3^{6k} - 2^{6k} = (3^6 - 2^6)M = 665M,$$
pa kako 665 deljivo sa 35, to je u ovom slučaju drugi broj deljiv sa 35.

15. Uputstvo: primetiti da je $(n+2-k)^{2005} + k^{2005}$, za sve $2 \leq k \leq n$, deljivo sa $n+2$ i da je samim tim dati broj uvek kongriuentan sa 1 po modulu $n+2$.

16. Primetimo da je $2^7 \equiv 1 \pmod{2^7-1}$, pa je $2^{50} \equiv 2 \pmod{2^7-1}$.

17. Primetimo da je $4444 < 10^4$, pa je $A < 10^{4 \cdot 4444} = 10^{17776}$. Znači, broj A ima najviše 17776 cifara pa je njegov zbir cifara najviše $17776 \cdot 9 = 159984$, tj. $B \leq 159984$. Sada je očigledno i zbir cifara broja B na već i od $5 \cdot 9$, tj. $C \leq 45$. Sada je i zbir cifara broja C ne već i od 12. Kako je $A \equiv_9 (-2)^{4444}$, pa kako je $2^6 = 64 \equiv_9 1$, to je $A \equiv_9 (-2)^4 \equiv_9 7$, pa je i $C \equiv_9 7$ (zashto?). Samim tim zbir cifara broja C mora biti 7.

18. Jasno je da svaki član datog niza mora biti deljiv sa 9. Neka je sa a_n označen n-ti član datog niza. Kako je $3^2 < 10$ imamo da je $3^{1996} < 10^{998}$, pa a_1 ima najviše 998 cifara. Znači njegova suma cifara nije veći od $998 \cdot 9 = 8929 > a_2$. Sada je jasno da je $a_3 \leq 8+8+9+9 = 34$, pa je $a_4 \leq 9$. Jasno je da je $a_n \leq 9$, za svako $n \geq 4$, pa kako $9 \mid a_{1996}$, to je $a_{1996} = 9$.

19. Primetimo prvo da je $A_0 = 1 + 9 + 25 = 35$, pa najveći zajednički delilac svih brojeva mora biti neki delilac od 35. Takođe je $A_1 \equiv_5 2^3 + 3^8 = 8 + 81^2 \equiv_5 3 + 1 = 4$, pa A_1 nije deljivo sa 5, a samim tim ni najveći zajednički delilac. Znači najveći zajednički delilac je ili 7 ili 1. Dokažimo da je svaki od brojeva A_n deljiv sa 7, tj. da je naveći zajednički delilac datih brjeva upravo jednak 7.
Primetimo prvo da je $(2^3)^n \equiv_7 1^n = 1$, da je $(3^6)^n \equiv_7 243^n \equiv_7 1^n = 1$ i da je $(5^6)^n \equiv_7 (4^3)^n \equiv_7 1^n = 1$, pa je $A_n \equiv_7 1 + 3^2 + 5^2 = 35$, pa samim tim $7 \mid A_n$.

20. Za date brojeve m i n mora biti ispunjeno $1000 \mid 1978^m(1978^{n-m} - 1) = A$. Kako je $1000 = 8 \cdot 125$, to A mora biti deljiv sa 8 i sa 125. Kako je $1978^{n-m} - 1$ neparan, to je 1978^m deljiv sa 8, tj. $m \geq 3$. Dalje kako je $1 \equiv_5 1978^{n-m} \equiv_5 3^{n-m}$. Kako je $3^1 \equiv_5 3$, $3^2 \equiv_5 4$, $3^3 \equiv_5 2$ i $3^4 \equiv_5 1$, to $4 \mid n - m$. Sada je $n - m = 4k$, pa je potrebno naći najmanje k takvo da je $1978^{4k} \equiv_{125} 1$. Kako je $1978^4 \equiv_{125} (-22)^4 = 484^2 \equiv_{125} (-16)^2 = 256 \equiv_{125} 6$, pa je dovoljno da je $6^k \equiv_{125} 1$. Po binomnoj formuli imamo da je
$$6^k = (1+5)^k \equiv_{125} 1 + 5k + 25\binom{k}{2} = \frac{25k^2 - 15k}{2} + 1.$$
Znači potrebno je da $125 \mid 25k^2 - 15k = 5k(5k-3)$. Kako $5k - 3$ nije deljivo sa 5, to je k deljivo sa 25, pa $100 \mid n - m$. Znači $n - m \geq 100$ i $m \geq 3$, pa je $n + m \geq 106$. Tražena minimalna vrednost je $n + m = 106$.

21. Pretpostavimo prvo da se $5^n + 5^m$ može pretstaviti kao zbir dva kvadarata i dokažimo da je $n - m$ paran broj. Naime, ukoliko pretpostavimo suprotno, tj. da je $n - m$ neparan imamo da je tačno jedan od brojeva n i m paran i tačno jedan neparan. Neka je n paran, tj. $n = 2k$, a m neparan, tj. $m = 2l + 1$. Tada je
$$5^n + 5^m = (5^k)^2 + 5(5^l)^2. \quad (1)$$
Kako kvadrati prirodnih brojeva daju ostatak 0, 1 ili 4 pri deljenju sa 8, imamo da je $5^n + 5^m \equiv_8 0$ ili $5^n + 5^m \equiv_8 2$ ili $5^n + 5^m \equiv_8 4$, jer je jednak zbiru dva kvadrata i paran je. S druge strane imamo da je $56n + 56m \equiv_8 6$, što je očigledna kontradikcija.
Dokažimo sada da ukoliko je $n - m$ paran da se tada broj $5^n + 5^m$ može predstaviti kao zbir dva kvadrata. U ovom slučaju brojevi m i n moraju biti iste parnosti. Ukoliko su parni tvrđenje je trivijalno, pa je dovoljno dokazati da se $5(5^k)^2 + 5(5^l)^2$ može predstaviti kao zbir dva kvadrata. Međutim ovo sledi na osnovu Lagranžovog identiteta i
$$(2^2 + 1)((5^k)^2 + (5^l)^2) = (2 \cdot 5^k - 5^l)^2 + (2 \cdot 5^l + 5^k).$$

22. Dokažimo da se među datim brojevima nalaze brojevi 2,3,5.
Naime, kako je četvrti stepen neparnog broja, neparan, to ne može svih 31 brojeva biti neparno, tj. jedan od njih mora biti paran. Kako je on i prost on mora biti jednak 2. Slično kako četvrti stepeni prirodnih brojevi koji nisu deljivi sa 3 daju ostatak 1 po modulu 3, to bar neki od datih 31 brojeva mora biti deljiv sa 3. Kako je on i prost, on mora biti jednak 3.
Dokažimo dalje da četvrti stepen bilo kog prirodnog broja n koji nije deljiv sa 5, daje ostatak 1 po modulu 5. Ukoliko je n kongruentno sa 1 ili -1 tada je očigledno njegov četvrti stepen kongruentan sa 1 po modulu 5. Takođe ukoliko je kongruentan sa 2 ili -2 tada je njegov četvrti stepen kongruentan sa $2^4 = 16$, tj. takođe kongruentan sa 1 po modulu 5.

Sada ukoliko nijedan od datih 31 brojeva nije deljiv sa 5, tada suma njihovih četvrtih stepena daje ostatak 1 po modulu 5, što je nemoguće. Znači bar jedna od njih je deljiv sa 5, pa kako je i prost, jednak je 5.

23. Primetimo da kubovi celih brojeva daju ostatke 0, 1 i 8 pri deljenju sa 9. Sada je jasno da se nijedan broj oblika $9k+4$ ne može prikazati kao zbir kubova tri cela broja.

24. Kako $21 \mid a^2+b^2$, to $3 \mid a^2+b^2$ i $7 \mid a^2+b^2$. Kako su ostaci kvadrata pri deljenju sa 3 ili 0 ili 1, to i a i b moraju biti deljivi sa 3, pa je a^2+b^2 deljivo sa 9. Takođe, kako kvadarati pri deljenju sa 7 daju ostatke 0,1,2 i 4 to i a i b moraju biti deljivi sa 7, pa je a^2+b^2 deljivo sa 49. Znači $9 \cdot 49 = 441 \mid a^2+b^2$.

25. Pogledati rešenja zadatka br. 23.

26. Prema Maloj Fermaovoj teoremi, za svaki broj koji nije deljiv sa 11 važi $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, tj. $11 \mid x^{10}-1 = (x^5-1)(x^5+1)$. Samim tim $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$, pa su jedini mogući ostaci pri deljenju petih stepena sa 11 jednaki 0,1,-1. Kako 2006 daje ostatak 4 pri deljenju sa 11, to je očigledno da data jednačina nema rešenja.

27. Primetimo da ne mogu svi brojevi p, q, r biti neparni. Znači bar jedan od njih je paran, pa kako je i prost on je jednak 2. Kako je $p^q + q^p > 2$, to ne može biti $r = 2$, pa je jedan od brojeva p ili q jednak 2. Neka je $p = 2$. Data jednačina postaje $2^q + q^2 = r$. Kako je $r > 2$, to je r neparan, pa je i q neparan. Kako je q neparan, to je $2^q \equiv_3 2$, pa ukoliko q nije deljivo sa 3, tada $3 \mid 2^q + q^2$. Međutim tada i $3 \mid r$, pa je $r = 3$, što je nemoguće, jer je $2^q + q^2 > 3$. Znači mora biti $q = 3$. Sada je $r = 2^3 + 3^2 = 17$.
Sva rešenja su trojke $(2, 3, 17)$ i $(3, 2, 17)$.

28. Dokažimo da je to moguće. Uzmimo da je $m = n = 2^{2^{1993}}$. Tada je

$$A = 1995^n - 5^n = 5^n(499^n - 1) = 5^{2^{1993}}(499^{2^{1993}} - 1) = 5^{2^{1993}}(499-1)(499+1)(499^2+1)\cdots(499^{2^{1992}+1}).$$

Da bismo dokaz završili dovoljno je dokazati da je A deljivo sa 10^{1995}, a nije deljivo sa 10^{1996}. Kako je $5^{2^{1993}}$ deljiv sa 5^1996, dovoljno je dokazati da je $499^{2^{1993}} - 1$ deljiv sa 2^{1995}, a nije sa 2^{1994}. Ovo sledi iz činjenice da je $499-1$ tačno deljivo sa 2 $499+1$ tačno deljivo sa 2^2, a svaki od brojeva $499^{2^k}+1$ je tačno deljiv sa 2, jer kako je 499^{2^k} kvadrat nije deljiv sa 4.

29. Rešenje pogledati u odgovarajućoj knjizi.

30. Iz uslova zadatka imamo da je $7n^2 > m^2$. Poznato je da ostaci kvadrata pri deljenju sa 7 mogu biti jedino 0,1,2 i 4, pa je zato i $7n^2 \geq m^2 + 3$. Da bismo sada dokazali da je

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn},$$

dovoljno je dokazati da je $m^4 + 2m^2 + 1 < 7m^2n^2$. Kako je $m^2 7n^2 \geq m^2(m^2+3) \geq m^4 + 3m^2 > m^4 + 2m^2 + 1$, za $m > 1$. Ostaje još dokaz zadatka u slučaju $m = 1$. To se svodi na $n\sqrt{7} > 2$, što je očiglwedno tačno.

31. Pretpostavimo prvo da nijedan od brojeva p i q nije prost. Tada nijedan od njih nije deljiv sa 3, pa je $p^2 \equiv_3 q^2 \equiv_3 1$. Iz jednakosti date u zadatku imamo da je i $p - q \equiv_3 (p+q)^2$. Sada ukoliko oba od brojeva p i q daju ostatak 1 ili ostatak 2 po modulu 3, leva stava kongruencije je 0, a desna nije, što je nemoguć e. Takođe, ukoliko p i q daju različite ostatke pri deljenju sa 3, tada je desna strana kongruencije jednaka 0, a leva nije, što takođe nije moguće.
Znači bar jedan od brojeva p i q je jednak 3.
Prvi slučaj: neka je $p = 3$. Tada je $27 - q^5 > 0$, što je očiledno nemoguće.
Drugi slučaj: neka je $q = 3$. Tada je $p^3 - 243 = (p+3)^2$, pa je $p^3 - p^2 - 6p = p(p^2 - p - 6) = 252 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$. Znači p je jedan od brojeva $2, 3, 7$. Kako je $4 - 2 - 6 < 0$ i $9 - 3 - 6$, a $7(49 - 7 - 6) = 7 \cdot 36 = 252$, to je jedino moguće $q = 7$.
Jedino reshenje je par $(3, 7)$.

32. Po Maloj Fermaovoj teoremi imamo da je $n_i^4 \equiv_5 1$ ukoliko n_i nije deljiv sa 5, pa je samim tim $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_N^4 \equiv_5 N$, pa mora da $5 \mid N$. Najmanji ovakav broj N je 1980.

33. Kako je $1 + 2 + \ldots + (p-1) = \dfrac{p(p-1)}{2}$, to je $A = 2^{\frac{p(p-1)}{2}} - 1$ i $B == 2^{\frac{p(p-1)}{2}} + 1$, pa je

$$AB = 2^{p(p-1)} - 1.$$

Kako je $2^{p-1} \equiv_p 1$, to je AB deljivo sa p, pa je bar jedan od brojeva A ili B deljiv sa p. Takođe, kako je $B - A = 2$ i $p > 2$ to ne mogu oba od tih brojeva biti deljiva sa p, pa je samim tim tačno jedan od A i B deljiv sa p.

34. Dovoljno je dokazati da je dati broj deljiv sa 2 i sa 5. Jasno je da ukoliko je n paran da je i dati broj paran. Takođe, ukoliko je n neprana tada je i svaki od brojeva $n, 3n^3, 7n^7, 9n^9$ neparan pa je njihov zbir paran. Znači dati broj je uvek paran. Takođe, ukoliko je n deljiv sa 5 imamo da je dati broj očigledno deljiv sa 5, a inače po Maloj Fermaovoj teoremi imamo da je $n^4 \equiv_5 1$, pa je

$$n + 3n^3 + 7n^7 + 9n^9 \equiv_5 n + 3n^3 + 7n^3 + 9n \equiv_5 0.$$

35. Primetimo da je $A(m,n) = m^3(m^2-1)(m^{3^{4n}+1}-1)$. Dovoljno je naći takvo n da je broj $A(m,n)$ deljiv sa $1992 = 8 \cdot 3 \cdot 83$,za svaki prirodan broj m. Kako kvadrat neparnog broja po modulu 8 daje ostatak 1, to je $m^3(m^2-1)$ uvek deljivo sa 3, a kako

kvadrat brloja koji nije deljiv sa 3 daje ostatak 1 po modulu 3, to je $m^3(m^2-1)$ deljivo i sa 3.
Sada se zadatak svodi na pronalaženje broja n takvog da je $A(m,n)$ deljivo sa 83, za svaki prirodan broj m. Primetimo da ukoliko je $3^{4n}+1$ deljivo sa 82, da je tada je po Maloj Fermaovoj teoremi $m(m^{3^{4n}+1}-1)$ deljivo sa 83. Kako je $3^{4n}+1=81^n+1$, to je on očigledno deljiv sa 82 ako je n paran.
Dokažimo da ukoliko n nije paran da onda postoji broj m takav da $A(m,n)$ nije deljiv sa 1992. Neka je m takav da je $m(m^2-1)$ nije deljiv sa 83, tj. takav da m nije kongruentan sa 0,1 ili -1. Dokažimo da tada nije $m^{3^{4n}+1}-1$ nije deljiv sa 83. Prema prethodnom imamo da je $m^{3^{4(n-1)}+1}-1$ deljivo sa 83. Sada je i $m^{3^{4n}+81}-m^{81}$ deljivo sa 83. Ukoliko pretpostavimo da je i $m^{3^{4n}+1}-1$ deljivo sa 83, tada lako dobijamo da je i $m^{81}-m^{80}=m^{80}(m-1)$, što je prema pretpostavci nemoguće.

36. Prvo primetimo da je $y^x \equiv 19 \pmod{x}$ i $x^y \equiv -19 \pmod{y}$. Po Fermaovoj teoremi je $y^x \equiv y \pmod{x}$ i slično $x^y \equiv x \pmod{y}$ pa $x \mid y-19$ i $y \mid x+19$. Pretpostavimo sada da je $y \leq 19$. Isprobavajući sve proste brojeve manje od 19 i korišćenjem uslova $x \mid y-19$ i $y \mid x+19$ dobijamo da su u ovom slučaju jedina rešenja parovi (2,3) i (2,7). Neka je dalje $y > 19$. Iz $x \mid y-19$ je $x \leq y-19$ pa i $x < y$. Sada je $2y > y+19 > x+19$ pa kako $y \mid x+19$ to mora biti $y = x+19$. Međutim kako su oba x i y prosti, a zbog $y = x+19$ moraju biti različite parnosti to mora biti $x = 2$. Međutim tada je $y = 21$ što nije prost broj pa su jedina rešenja date jednačine parovi (2,3) i (2,7).